机械振动

第二节　振动能量和振动的合成

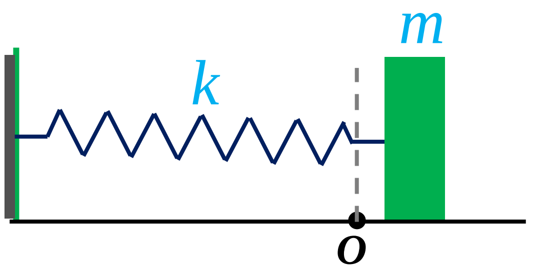
1. 一弹簧振子作简谐振动，总能量为E_1，如果简谐振动振幅增加为原来的两倍，重物的质量增为原来的四倍，则它的总能量E_2变为：

解析：如图对于弹簧振子的简谐振动：

$E=E_k+E_p=kA^2/2=m\omega^2A^2/2$

其中：$\omega=(k/m)^{1/2}$，因为$m'=4m$，$A'=2A$。

则$E_2=k(2A)^2/2=4m(k/4m)(2A)^2/2=4E_1$

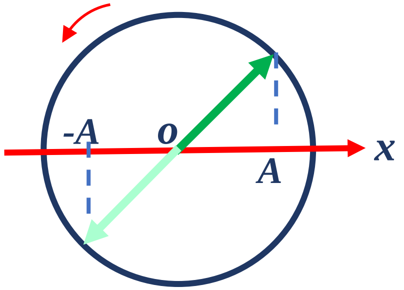


2. 弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为：

解析：如图对于弹簧振子的简谐振动，则在任意半个周期内，振子一定在和初始位置关于平衡位置的对称点位置(如图A和-A对应的位置)。则振子的弹性势能、动能都和初始位置的弹性势能、动能相等。

则弹性力做功，由功能关系得：

$W=E_k(末)-E_k(初)=0$



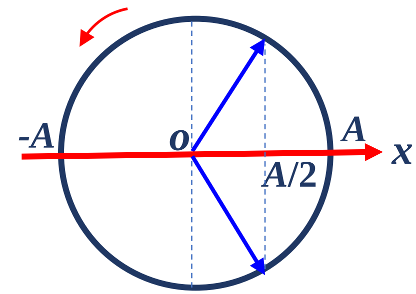
3. 一弹簧振子作简谐振动，当位移为振幅的一半时，其动能为总能量的：

解析：对于弹簧振子的简谐振动，由旋转矢量法：

因为：对于$x=A/2$时，相位：$\omega t+\varphi=\pi/3$或者$5\pi/3$。

由 $E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$ 可知其动能为：$E_k=3kA^2/8$

且$E=E_k+E_p=kA^2/2$；则动能为总能量的：3/4



旋转矢量法

4. 一质点作简谐振动，已知振动周期为T，则其振动动能变化的周期是：

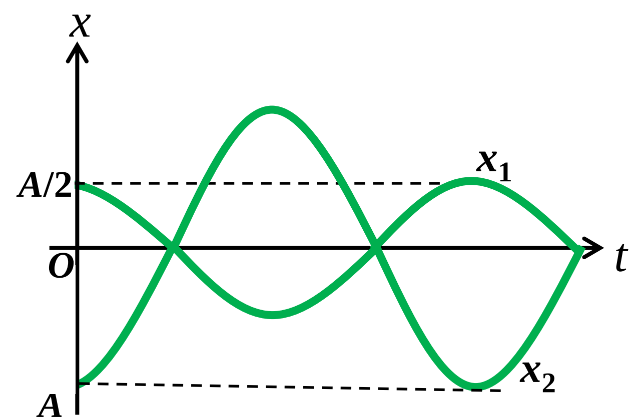
解析：由题意知：对于简谐振动，$x=A\cos(\omega t+\varphi)$其振动周期为$T=2\pi/\omega$.

而对于振动动能为：

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$
$$=\frac{1}{4}kA^2[1-\cos(2\omega t-2\varphi)]$$

则其振动动能的周期为：$T'=2\pi/2\omega=T/2$

5. 图中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为：



解析：由图知，两振动的周期相同，振动方向都在x轴

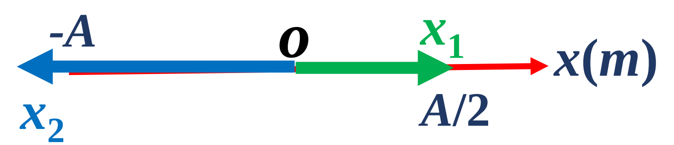
则$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$，$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$。

其合振动为：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$，由旋转矢量知：

$A_1=A/2$，$\varphi_1=0$；$A_2=A$，$\varphi_2=\pi$

可得$\varphi=\varphi_2=\varphi_1+\pi$

合成的余弦振动的初相为π。



6. **两根轻弹簧的倔强系数分别为k_1和k_2，串联后与物体相接做简谐振动。则此系统的固有频率为ν等于：**

解析：由题意知：对于两个弹簧分别作简谐振动，其振动频率为：$\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

对于串联劲度系数$k=k_1k_2/(k_1+k_2)$，带入可得：固有频率为：

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

补充：求两个轻质弹簧串联和并联的劲度系数：两种方法，第一种（公式法，上一节思考题中已给出答案）；第二种（受力分析法，如下）

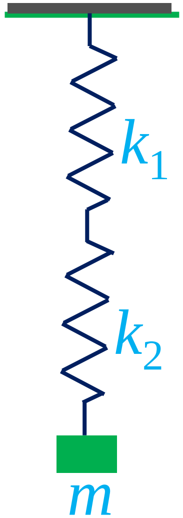
解析：如图：设两个弹簧劲度分别为k_1、k_2,设有一重物质量为m挂在弹簧上 。x_1，x_2分别为弹簧拉伸长度。

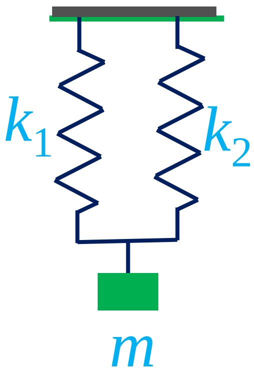
串联时：$kx=mg$，其中$x=x_1+x_2$，且$x_1=mg/k_1$ $x_2=mg/k_2$

代入即得: $1/k=1/k_1+1/k_2 \rightarrow k=(k_1k_2)/(k_1+k_2)$

并联时：$x_1=x_2=x$，且$k_1x+k_2x=mg=kx$

得：$k=k_1+k_2$





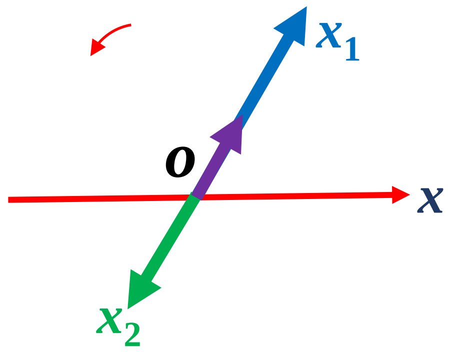
7\. 一物体同时参与同一直线上的两个简谐振动：$x_1=0.05\cos(4\pi t+\pi/3)$ (SI)，$x_2=0.03\cos(4\pi t-2\pi/3)$ (SI)，则合成振动的振幅为：

解析：由题意知：两个简谐振动是同频率，同方向上的振动，由振动的合成得：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

合振幅为：

$$A=\sqrt{0.05^2+0.03^2+2\times0.03\times0.05\cos(-2\pi/3-\pi/3)}$$
$$=0.02$$



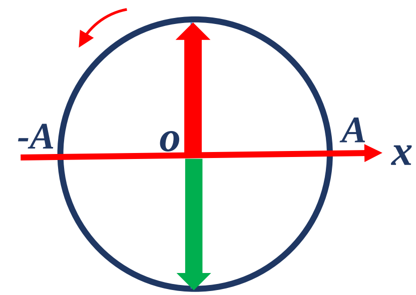
注：求两个振动的合振动时，要利用旋转矢量法，在一幅图中画出同一时刻（一般取t=0时刻），两个振动对应的旋转矢量，读出它们之间的夹角（也就是两个振动之间的相位差），再利用平行四边形法则求它们的合矢量。其中合矢量的模就是合振动的振幅，合矢量与x轴正方向的夹角就是合振动的初相位。

特殊情况：当两个振动的相位差为π的奇数倍时，振动减弱，$A=|A_1-A_2|$；

当两个振动的相位差为2π的整数倍时，振动加强，$A=|A_1+A_2|$

8. 两个振动方向、振幅、频率均相同的简谐运动相遇叠加，测得某一时刻两个振动的位移都为零时，运动方向相反，则这两个振动相位之差和合振幅分别为：

解析：由题意知：两个简谐振动是同频率振动，它们之间的相位差一直保持不变。



旋转矢量法

由于某一时刻t有：$x_1=x_2=0$；v_1和v_2的方向相反，

意味着它们的相位（旋转矢量法）分别是：

$\varphi_1=\pi/2$；$\varphi_2=-\pi/2$ 或 $\varphi_1=-\pi/2$；$\varphi_2=\pi/2$

则它们之间的相位差：$\Delta\varphi=\pi$；

合振幅为：$A=|A_1-A_2|=0$

注：对比两个振动的相位差，画它们在同一时刻的旋转矢量，看它们旋转矢量之间的夹角。且如果题中说它们的运动状态完全相反，那就意味着，它们的旋转矢量相反，相位相差π。

9. 将频率为400Hz的标准音叉和一待测频率的音叉同时振动，测得拍频为2.0Hz，将频率为405Hz的标准音叉与待测音叉同时振动，测得拍频为3.0Hz，则待测音叉的频率为：

解析：本题考点：拍频的计算公式：$\Delta\nu = |\nu_1 - \nu_2|$

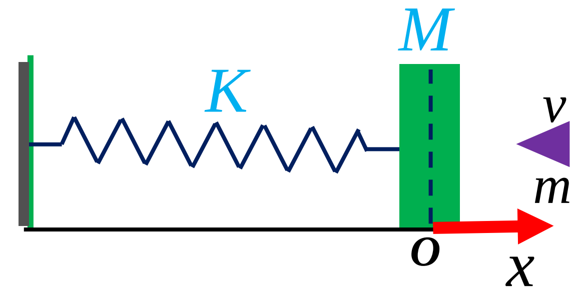
由题意知：标准音叉与待测音叉同时振动产生的拍频是：2 Hz。

则待测音叉的频率为：398 Hz或者402 Hz。

又因为待测音叉与405 Hz的标准音叉同时振动产生的拍频为3 Hz。

所以待测音叉的频率为402 Hz。

10. 如图所示，质量为1.0×10^{-2}kg的，以$500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的速度射入并嵌入在木块中，同时使弹簧压缩从而作简谐运动。设木块的质量为4.99kg，弹簧的劲度系数为8.00×10^{3} $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$。若以弹簧原长时物体所在处的坐标原点，向右为$x$轴正方向，求简谐运动方程。

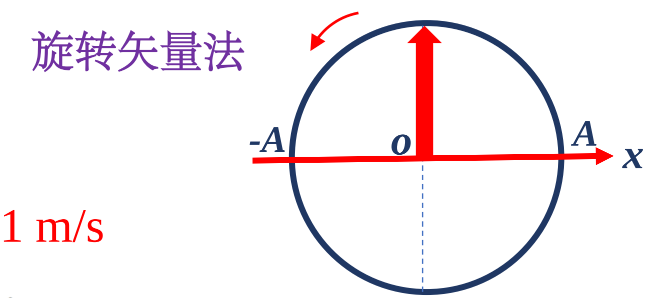


解析：由子弹快速的嵌入木块中，过程较短，动量守恒。

子弹和木块组成的系统做简谐振动，机械能守恒。

设，弹簧压缩的最大距离为A，子弹和木块组成的系统在平衡位置处，获得的初速度为v_m，此时系统的动能最大，势能为0。

设，作简谐振动的圆频率为ω，在初始时刻t=0时，A=0，且向着x轴负方向运动，由旋转矢量法可得，$\varphi=\pi/2$



则：$x=A\cos(\omega t+\pi/2)$，其中$\omega=[K/(m+M)]^{1/2}=40$ rad/s

由碰撞过程动量守恒得：$mv=(m+M)v_m$　　则v_m=1 m/s

又由简谐振动过程中机械能守恒得：$\frac{1}{2}(m+M)v_m^2=\frac{1}{2}KA^2$　则A=0.025 m

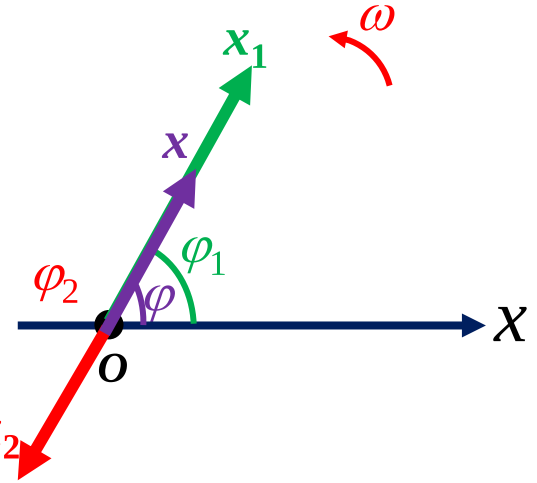
得简谐振动方程为：$x=0.025\cos(40t+\pi/2)$ (m)

11. 已知一质点同时参与两个同方向的简谐振动，其简谐振动方程分别为：

x_1=0.05cos(4t+π/3) (SI)， x_2=0.03sin(4t-π/6) (SI)。画出两振动的旋转矢量图，并求合成振动的振动方程。

解析：由题可知：x_2=0.03sin(4t-π/6)=0.03cos(4t-2π/3) (SI)

可做出如图所示得旋转矢量图；



由图可知，这两个简谐振动的相位差$\Delta\varphi$ =π，且$A_1>A_2$，意味着它们的合振动是振动减弱的，即$x=x_1+x_2$，$A=|A_1-A_2|$，且x与x_1同相位

即，合振动方程为：x=0.02cos(4t+π/3) (SI)

思考题：弹簧振子作简谐振动时，如果振幅增加为原来的两倍而频率减少为原来的一半，它的总能量怎么改变？

解析：由弹簧振子得总能量为：$E=E_k+E_p=kA^2/2=m\omega^2A^2/2$。

若$A'=2A$，且$\nu'=\nu/2$。又因为：$\omega=2\pi\nu=\sqrt{k/m}$，则：

(1)若是保持k不变，总能量只与振幅有关，通过改变m来使ν减小到原来的一半，则：

$$E'=k(2A)^2/2=m\frac{k}{m}(2A)^2/2=4E$$

(2)若是保持m不变，总能量与振幅和角频率都有关系，通过改变k来使ν减小到原来的一半，则：

$$E'=m\left(\frac{2\pi\nu}{2}\right)^2(2A)^2/2=m\omega^2A^2/2=E$$